النمذجة الرياضية: "هي تطبيق الرياضيات في معالجة المشاكل الحياتية، الرياضية، ومشاكل علوم أخرى وذلك عن طريق تحويل المشكلة الحياتية الى مسألة رياضية وحلها واختيار الأفضل.

النموذج الرياضي: عبارة عن مجموعة من العلاقات الرياضية والمنطقية التي تمثل أركان الحالة قيد الدراسة حيث تأخذ هذه النماذج علاقات هامة بين المتغيرات.

مما يتألف النموذج الرياضي: ① من تابع الهدف: يجب زيادته للحد الأعلى / انقاصه للحد الأدنى حسب المسألة
② قيود (شروط) محاصرة الحلول بالقيم الممكنة.

ماهي شروط النماذج الرياضية: ① أن تكون قابلة للحل
② أن تمثل الوضع الأصلي أصلح تمثيل.

الحجوزة الأول

الخطوات الواجب اتباعها لبناء النموذج الرياضي:

① دراسة المسألة وتحديد غاياتها ومكوناتها
② تحديد المدخلات والمخرجات وتحديد القيود المفروضة (الشروط).
③ بيان علاقات التأثير بين مجاهيل المسألة.

أنواع النماذج الرياضية

نماذج خطية
يكون تابع الهدف والقيود علاقات خطية أي لا تحوي (السور - الجذور - قوة - لوغاريتم)

نماذج لا خطية
يكون تابع الهدف أو القيود أو كلاهما علاقات لا خطية أي تحوي (السور - الجذور ...)

نماذج ديناميكية
هي النماذج التي تعبر عن مسألة وتدرسها على مراحل زمانية متتابعة أو تراجعية مثل (ادخار واستثمار دراسة سرية)

أولاً: النماذج الخطية

من حيث دالة الهدف
نميز نوعان:

① مسألة تعظيم Max
تابع الهدف أكبر ما يمكن

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow Max$$

② مسألة تقليل Min
تابع الهدف أصغر ما يمكن

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow Min$$

من حيث القيود (الشروط) نميز نوعان:

① شكل قياسي: جميع القيود هي معادلات (مساواة)

② شكل عام: جميع القيود تكون متراجحات ومساواة

مثال: مسألة تركيب الوجبات الغذائية (علف - أدوية)

لنفترض أننا نريد تركيب وجبة غذائية من أربعة أنواع من المواد الغذائية $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ وسعر الواحدة من كل منها $c_1\ c_2\ c_3\ c_4$ والشروط أن لا تقل كمية العناصر الغذائية في كل وجبة (البروتينات عن b_1 ، الكربونات عن b_2 ، الفيتامينات عن b_3)

المطلوب: ايجاد المقادير اللازمة من كل من المواد $(f_1 -- f_4)$ التي يجب ادخالها في الوجبة بحيث تكون تكلفتها أقل ما يمكن وذلك اذا علمت أن:

واحدة المادة f_1 تحتوي على a_{11} بروتين a_{21} كربونات a_{31} فيتامينات

" " f_2 " " a_{12} " a_{22} " a_{32} "

" " f_3 " " a_{13} " a_{23} " a_{33} "

" " f_4 " " a_{14} " a_{24} " a_{34} "

الحل:

ترجمة المسألة

المواد الغذائية / العناصر الغذائية	f_1	f_2	f_3	f_4	كمية العناصر الغذائية المطلوب توفرها بالوجبة
بروتينات	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
كربونات	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
فيتامينات	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
سعر الوحدة	c_1	c_2	c_3	c_4	

نلاحظ أن المجهول هو الكمية المستخدمة من المواد الغذائية $(f_1 — f_4)$

لذلك نفترض أن x_1 الكمية المطلوبة من f_1 ، x_3 الكمية المطلوبة من f_3

" " " x_2 " f_2 ، x_4 " " " f_4

وبما أن المسألة كان سعر الوحدة الواحدة من f_1 هو c_1 وبالتالي:

سعر الكمية المستخدمة من f_1 هي c_1x_1

" " " f_2 " c_2x_2

" " " f_j " $c_j x_j$ فيكون

تابع الهدف

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots$$

$$Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j$$

القيود (الشروط): أن لا تقل كمية العناصر الغذائية بكل وجبة عن b_1 b_2 b_3

ولدينا كمية البروتين في f_1 هي a_{11}
$$\left.\begin{array}{l} a_{11} \quad \text{هي} \quad f_1 \\ a_{12} \quad " \quad f_2 \\ a_{13} \quad " \quad f_3 \end{array}\right\}$$
مجموع كمية البروتين لا تقل عن b_1

فيكون:
$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \overset{\text{لا تقل}}{\geqslant} b_1$$

وبشكل مشابه
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geqslant b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geqslant b_3$$

وبعد أن تكلمنا عن جميع المسألة نضع النموذج الرياضي (الشروط (القيود))

النموذج الرياضي: المطلوب بالمسألة أقل كلفة أي التابع $\longleftarrow$ Min

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \longrightarrow Min$$
$$\boxed{Z = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j \longrightarrow Min}$$

نضع الشروط (القيود)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geqslant b_1 \quad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geqslant b_2 \quad (2)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geqslant b_3 \quad (3)$$

وشرط عدم السلبية
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

انتهى النموذج

وانتهت المحاضرة

مسألة عن الربح الأعظمي في الشركة (صيغة عامة):

لنفرض أن شركة تقوم بصناعة (n) نوعاً من المنتجات $A_1, A_2, \dots, A_n$
وتستخدم لذلك (m) نوعاً من المواد الأولية $B_1, B_2, \dots, B_m$
ولنفرض أن واحدة المنتج a_j حيث $(j=1,2,\dots,n)$
تحتاج من المادة b_i حيث $(i=1,2,\dots,m)$ مقداراً يساوي (a_{ij})
كما نفرض أن مقدار الربح الذي تحصل عليه الشركة من واحدة المنتج هي (C_j)
وأن المخزون الأعظمي من المادة (B_i) هو (b_i)

والمطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي تحصل الشركة من خلاله على أكبر ربح ممكن.

الحل:

ترجمة المسألة: دائماً نبحث عن المجهول ونفرضه:
لذلك نفرض أن (X_j) هي الكمية المنتجة من المنتج A_j $(j=1,2,\dots,n)$

مثلاً $A_j \rightarrow$ (A_1 برادات ، A_2 غسالات ، A_3 تلفزيونات)

ولدينا من المسألة أن المنتج (A_j) يربح (c_j) $(j=1,2,\dots,n)$

فيكون تابع الهدف:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\boxed{Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

ملاحظات:
- دائماً يجب كتابة ماذا يعبر المجهول الذي نفرضه.
- لا نضع مع دالة الهدف خلال مرحلة ترجمة المسألة (Min, Max) ونضعها فقط في النموذج الذي يحقق المطلوب.

نستخدم الجداول للسهولة: (الجدول للوحدة الواحدة)

المنتجات / المواد الأولية	A_1	A_2	...	A_n	الكميات المتوفرة
B_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	---	a_{2n}	b_2
B_3	a_{31}	a_{32}	---	a_{3n}	b_3
B_m	a_{m1}	a_{m2}	----	a_{mn}	b_m
الربح	c_1	c_2	......	c_n	

حيث: a_{ij} هو ما يحتاجه المنتج (j) من المادة (i) حيث ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$)

مثلاً: a_{21} هو ما يحتاجه المنتج الأول A_1 من المادة الثانية B_2

القيود أو الشروط

من كل مادة أولية (B_i) لدينا المخزون (b_i)

فبالتالي ما نحتاجه من المادة (B_1) مثلاً من إنتاج كل المنتجات (A_j) يجب أن لا يتجاوز كمية المخزون من هذه المادة وهو (b_1)

فيكون الشرط:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$\leq$ لأنه يمكن أن تبقى كمية من المادة B_1 لا تستخدم بإنتاج شيء.

وللمادة (B_2) يكون الشرط:

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

وهكذا

$$\boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m}$$

شروط عدم السلبية

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i \geq 0)$$

انتهت ترجمة المسألة.

النموذج الرياضي: بهذا المثال القيمة الأعظمية لربح الشركة

$$\boxed{Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow Max}$$

التابع الهدف

الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0$$

شروط عدم السالبية

مثال عددي عن المسألة السابقة: تقوم إحدى الشركات بانتاج نوعين من المنتجات A_1, A_2 وتستخدم ثلاث مواد أولية (B_1, B_2, B_3) متوفرة لدى الشركة منها على التوالي $(24, 40, 27)$ ألف وحدة. فإذا كانت المقادير اللازمة من كل تلك المواد لإنتاج واحدة من كل من المنتجين A_1, A_2 كما في الجدول:

منتجات / مواد أولية	A_1	A_2
B_1	3	6
B_2	8	4
B_3	9	3

وإذا علمت أن الربح العائد من الوحدة المنتج الأول A_1 هو (6 ل.س) والثاني A_2 هو (9 ل.س) فالمطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق أكبر ربح للشركة.

ترجمة المسألة: نفرض أن X_1 الكمية المنتجة من A_1
X_2 الكمية ~ ~ A_2

فيكون الربح لدينا هو $\boxed{Z = 6X_1 + 9X_2}$ تابع الهدف

الشروط : الكمية المتوفرة من B_1 هي 24 ألف ⇐ $3X_1+6X_2 \leq 24$

" " " B_2 هي 40 " ⇐ $8X_1+4X_2 \leq 40$

" " " B_3 هي 27 ألف ⇐ $9X_1+3X_2 \leq 27$

شرط عدم السلبية $X_1, X_2 \geq 0$

النموذج الرياضي :

دالة الهدف $\boxed{Z=6X_1+9X_2 \longrightarrow Max}$

الشروط :

$$3X_1+6X_2 \leq 24$$
$$8X_1+4X_2 \leq 40$$
$$9X_1+3X_2 \leq 27$$

شرط عدم السلبية

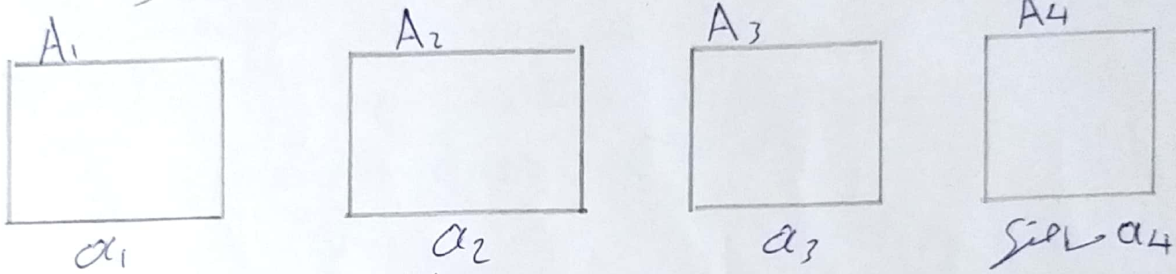
$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال عن الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية

لنفرض أنه لدينا (X) منطقة زراعية $(A_1, A_2 \dots A_n)$ ومساحة كل منها $(a_1, a_2 \dots a_n)$ نريد زراعتها بـ (m) نوعاً من المحاصيل الزراعية لتأمين متطلبات المجتمع منها. حيث يلزمنا من المحصول (i) المقدار (b_i).

فإذا كان متوسط انتاجية واحدة المساحة في الحقل (j) من المحصول (i) تساوي (a_{ij}) طن من الهكتار وكان الربح الحاصل من كل واحدة من المحصول (i) تساوي (c_i)

والمطلوب: تحديد مقدار المساحة اللازمة زراعتها لكل من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن منها مع تلبية حاجات المجتمع من كل محصول.



مساحات نزرع فيها (m) محصول ونريد معرفة من كل محصول ما المساحة اللازم زراعتها

نحن أمام ولنرمز لـ (X) مقدار المساحة المزروعة من المنطقة (j) بالمحصول (i) حيث $j = 1, \dots, n$ ؛ $i = 1, \dots, m$

المنطقة / المحاصيل	A_1	A_2	A_3	----	A_n	مقدار الطلب	الربح
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	—	a_{1n}	b_1	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	—	a_{2n}	b_2	c_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	—	a_{3n}	b_3	c_3
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	—	a_{mn}	b_m	c_m
مقدار المساحة المتوفرة	a_1	a_2	a_3		a_n		

ولهنا نفرض (X_{ij}) مقدار المساحة من المنطقة (j) بالمحصول (i)

القيود: (شروط المساحة المزروعة) المساحة المزروعة من الأرض الأولى A_1 من كل المحاصيل يجب أن لا تتجاوز a_1 مساحة A

بالتالي يكون:

$$
\left(
\begin{array}{l}
X_{11}+X_{21}+X_{31}+\cdots+X_{m1}=a_1 \\
X_{12}+X_{22}+X_{32}+\cdots+X_{m2}=a_2 \\
\vdots \\
X_{1n}+X_{2n}+X_{3n}+\cdots+X_{mn}=a_n
\end{array}
\right)
$$

(شروط تلبية حاجات المجتمع) تلبية حاجات المجتمع مع امكانية تصدير الفائض

$$\left[a_{11}X_{11}+a_{12}X_{12}+a_{13}X_{13}+\cdots+a_{1n}X_{1n} \geqslant b_1 \right]$$

حيث $a_{11}X_{11}$ تمثل كمية المحصول الأول لدى زراعته بالمنطقة الأولى

وهنا نلاحظ: $\geqslant$ هي المطلوبة أي نغطي الكمية المطلوبة من المنتج لتغطية الحاجة المحلية منه $(=)$ و $(>)$ نزيد للتصدير

= حاجة المجتمع دون تصدير

< لا نكتفي في حاجة المجتمع ونحتاج الى الاستيراد.

ونحن نبحث عن الربح لذلك نغطي الحاجة ونزيد كمية للتصدير

$$a_{21}X_{21}+a_{22}X_{22}+a_{23}X_{23}+\cdots+a_{2n}X_{2n} \geqslant b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}X_{m1}+a_{m2}X_{m2}+\cdots+a_{mn}X_{mn} \geqslant b_m$$

تابع الهدف: نلاحظ أن كمية الربح من المحصول الأول في جميع المناطق الزراعية هي:

$$c_1(a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\dots+a_{1n}x_{1n})$$

وتكتب بالشكل $\boxed{\left(c_1\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}\right)\right)}$

وكذلك الربح للمحصول الثاني هي

$$\boxed{c_2\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_{2j}\right)}$$

ومنه نجد تابع الهدف

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i(a_{ij}x_{ij})$$

انتهت مرحلة ترجمة المسألة

النموذج الرياضي: تابع الهدف (القيمة الأعظمية)

$$\boxed{Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_i(a_{ij}x_{ij}) \rightarrow Max}$$

الشروط: شروط المساحة:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+\dots+x_{m1}=a_1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+\dots+x_{m2}=a_2$$
$$\vdots$$
$$x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\dots+x_{mn}=a_n$$

شروط تلبية الحاجة:

$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\dots+a_{1n}x_{1n}\geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_{m1}+a_{m2}x_{m2}+\dots+a_{mn}x_{mn}\geq b_m$$

حيث $\left(\begin{matrix} i=1\dots m \\ j=1\dots n\end{matrix}\right)$

شرط عدم السالبية

$$(x_{ij}\geq 0)$$

مثال عددي عن نموذج الاستغلال الأمثل للأراضي الزراعية

لنفرض أننا نريد استغلال (4) مناطق مساحة كل منها هكتار

السهل	الغابة	الحقل	الصحراء
10	15	100	50

ونريد زرعها بالمحاصيل والكمية التي نحتاجها من كل المحاصيل

والربح العائد من الطن للواحد لكل سنة

	قمح	شعير	قطن	تبغ	شوندر
كمية	2000	1500	500	100	700
ربح	1500	1000	5000	4500	500

ولنفرض أن انتاجية المناطق من تلك المحاصيل معطاة بالجدول:

المنطقة / المحصول	السهل	الغابة	الحقل	الصحراء
قمح	5	4	6	0
شعير	6	5	4	6
قطن	4	10	8	5
تبغ	7	2	0	0
شوندر	3	12	10	4

والمطلوب صياغة النموذج الرياضي بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن

الحل: ترجمة المسألة: نفرض أن x_{ij} هي المساحة من المنطقة j المزروعة بالمحصول i حيث $(i=1\ldots5 \,,\, j=1\ldots4)$

الكمية المنتجة من القمح $5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+0x_{14}$ وبحساب الربح نضرب ب 1500

〃 〃 الشعير $6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24}$ 〃 〃 ب 1000

〃 〃 القطن $4x_{31}+10x_{32}+8x_{33}+5x_{34}$ 〃 〃 ب 5000

〃 〃 التبغ $7x_{41}+2x_{42}+0x_{43}+0x_{44}$ 〃 〃 ب 4500

〃 〃 الشوندر $3x_{51}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54}$ 〃 〃 ب 500

ونجمع كل الحدود لتشكل تابع الهدف Z

الشروط:

شروط الطلبات

$$5x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+0x_{14} \geq 2000$$
$$6x_{21}+5x_{22}+4x_{23}+6x_{24} \geq 1500$$
$$\vdots$$
$$3x_{31}+12x_{52}+10x_{53}+4x_{54} \geq 700$$

شروط المساحة

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=10$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=15$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=100$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=50$$

وشروط عدم السلبية حيث $i=1,2,3,4,5$ ، $j=1,2,3,4$

$$x_{ij} \geq 0$$

ونستطيع كتابة جملة النموذج مع عدم نسيان ذكر $(\to Max)$ للتابع الهدف

المحاضرة الثالثة (٢٦٥)

نماذج النقل احدى النماذج الخطية وعادة ما نستخدم هذه النماذج لأقل كلفة.

مسألة النقل "صيغة عامة"

ليكن لدينا (n) مركز انتاج و (m) مركز استهلاك ولتكن $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ الكميات المتوفرة في مراكز الانتاج (A_i) حيث $(i=1,2,\dots,n)$ ونريد نقلها الى (B_j) مركز انتاج حيث يصل المركز (B_j) الكمية (b_j) حيث $(j=1,2,\dots,m)$ وكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج (i) الى المركز (j) هي (c_{ij})

والمطلوب: اجراء عملية نقل بأقل كلفة ممكنة (نموذج رياضي لأقل كلفة نقل)

ترجمة المسألة: الكميات المنتجة في جميع مراكز الانتاج هي: $\sum_{i=1}^{n} a_i$

حاجات مراكز الاستهلاك هي: $\sum_{j=1}^{m} b_j$

نقوم بالمقارنة بين المقدارين السابقين ونميز هنا حالتين:

الحالة الأولى

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

تسمى النموذج مغلق أي أنه متوازن حيث يتم نقل جميع المواد المنتجة الى مراكز الاستهلاك.

الحالة الثانية ونميز حالتين

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ يوجد فائض بالانتاج

$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$ يوجد عجز بالانتاج

ولنناقش كل حالة على حدا

$\boxed{\text{الحالة الأولى: النموذج المغلق}}$

وهنا نعرف x_{ij} هي الكمية المنقولة من المركز الانتاجي (i) للمركز الاستهلاكي (j)

ولدينا كلفة نقل الوحدة الواحدة هي (c_{ij}) ومنه يكون:

الجدول المعبر عن المسألة :

مراكز الإنتاج / مراكز الاستهلاك	A_1	A_2	.....	A_n	حاجات المراكز
B_1	x_{11}	x_{21}	.....	x_{n1}	b_1
B_2	x_{12}	x_{22}	---	x_{n2}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_m	x_{1m}	x_{2m}	----	x_{nm}	b_m
الكميات المتوفرة	a_1	a_2	---	a_n	$\sum_{i=1}^{n} a_i$ / $\sum_{j=1}^{m} b_j$

ومنه كلفة نقل المواد من المركز الإنتاجي الأول لجميع مراكز الاستهلاك $\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$

" " " " " " الثاني " " " $\sum_{j=1}^{m} c_{2j} x_{2j}$

فتكون دالة الهدف :

$$Z = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} c_{2j} x_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^{m} c_{nj} x_{nj}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

والشروط : (1) شروط الكميات المتوفرة في مراكز الإنتاج :

وهنا مجموع الكميات المنتجة بالمركز الأول والمنقولة لجميع مراكز الاستهلاك يجب أن تساوي الكمية المتوفرة في مركز الإنتاج الأول فيكون :

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} = a_1$$

وبنفس الطريقة لباقي مراكز الإنتاج يكون

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2m} = a_2$$

$$\vdots$$

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} = a_n$$

(2) شروط الكميات المطلوبة (حاجة مراكز الاستهلاك) :

وهنا الكمية المطلوب نقلها لمركز الاستهلاك الأول من كل مراكز الإنتاج يجب أن تساوي حاجته فيكون :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + \dots + x_{n1} = b_1$$

وبنفس الطريقة لباقي مراكز الاستهلاك

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + \dots + x_{n2} = b_2$$

$$\vdots$$

$$x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm} = b_m$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$

$j = 1, 2, \dots, m$

شروط عدم السلبية $x_{ij} \geq 0$

النموذج الرياضي :

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

$$x_{11}+x_{21}+\dots+x_{n1}=b_1 \qquad x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1m}=a_1$$
$$x_{12}+x_{22}+\dots+x_{n2}=b_2 \qquad x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2m}=a_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_{1m}+x_{2m}+\dots+x_{nm}=b_m \qquad x_{n1}+x_{n2}+\dots+x_{nm}=a_n$$

ضمن شروط عدم السلبية $x_{ij} \geq 0$ حيث $\left(\begin{array}{l} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m \end{array}\right)$

الحالة الثانية (أ) حالة العجز في الانتاج $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$

الحل:

أولاً: نقوم بتحويل النموذج مغلق وذلك بإضافة مركز انتاجي إضافي تكون الطاقة الانتاجية تساوي الفرق بين المجموعين (مقدار العجز الحاصل)

فيكون المركز الانتاجي A_{n+1} الكمية المتوفرة من المنتجات فيه هي a_{n+1} تساوي العجز الحاصل فيكون :

$$\left(a_{n+1}=\sum_{j=1}^{m} b_j-\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

ونزاد على مراحل الحل النموذج المغلق السابقة المعلومات الخاصة بالمركز (A_{n+1}) فعلى الجدول نضيف الصف لمركز الانتاج (A_{n+1}) الكمية المتوفرة فيه هي (a_{n+1}) وفيه $(x_{n+1\,j})$ ويكون $\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)$

ويكون تابع الهدف بمرحلة الترجمة للمسألة $\boxed{Z=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}}$ وضمن النموذج الرياضي يكون $\boxed{Z=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \rightarrow Min}$

والشروط تكون:

الكمية المطلوبة | الكميات المتوفرة

$$x_{11}+x_{21}+\dots+x_{n+1\,1}=b_1 \qquad x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1m}=a_1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_{1m}+x_{2m}+\dots+x_{n+1\,m}=b_m \qquad x_{n+1\,1}+x_{n+1\,2}+\dots+x_{n+1\,m}=a_{n+1}$$

ضمن شروط عدم السلبية $x_{ij} \geq 0$ $\left\{\begin{array}{l} i=1,2,\dots,n+1 \\ j=1,2,\dots,m \end{array}\right\}$

الحالة الثانية (ب) حالة الفائض في الانتاج أي: $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$

وبنفس الطريقة نقوم بتحويل النموذج الى نموذج مغلق وهذه المرة باضافة مركز استهلاك جديد يستقبل الفائض في الانتاج ونحصل على الحل (الكمية المطلوبة من قبل مركز الاستهلاك الجديد) تكون مساوية للفائض في الانتاج

المركز الاستهلاكي الجديد هو B_{m+1} وطلبه هو b_{m+1}

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$$

حيث $(c_{i\,m+1}=0)$ كلفة نقل الوحدة له صفرية.

نجري التعديلات على الجدول والشروط في الحل للنموذج المغلق بالحالة الأولى نضيف سطر خاص (B_{m+1}) مركز استهلاكي جديد طاقته (b_{m+1})

وتكون:

دالة الهدف بمرحلة بناء المسألة: $\boxed{Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m+1} c_{ij} x_{ij}}$ ونعيد النموذج رياضياً $\boxed{Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m+1} c_{ij} x_{ij} \rightarrow Min}$

وتكون $(c_{m+1}=0)$

والشروط تكون:

الكميات المطلوبة

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$x_{1\,m+1} + x_{2\,m+1} + \dots + x_{n\,m+1} = b_{m+1}$$

الكميات المتوفرة

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} + x_{1\,m+1} = a_1$$

$$\vdots$$

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots x_{nm} + x_{n\,m+1} = a_n$$

وشروط عدم السلبية $x_{ij} \geq 0$ حيث $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m+1 \end{pmatrix}$

وهكذا تكون قد درسنا مسألة النقل في جميع الحالات

«المحاضرة الرابعة» «٧»

«الاسناد»

تهتم هذه الدراسة بالاسناد الأفضل لمختلف الموارد الانتاجية والاقتصادية على مختلف الأعمال المراد انتاجها وتمتاز هذه المسائل ببساطة معالجتها للمشاكل بعكسه مسائل النقل.

في هذه المسائل تتساوى الأعمال المراد انجازها مع عدد الموارد.

دالة الهدف عليه أن يكون Min، Max.

مسألة الاسناد «الصيغة العامة»

لنفرض أننا نريد توزيع (n) عاملاً أو آلة على (n) عملاً بحيث يقوم كل عامل بانجاز عمل واحد فقط وبحيث يكون اجمالي الانتاج لهم أكبر ما يمكن وذلك ضمن التكلفة المحددة لكل منهم بحيث: نرمز لانتاج العامل (i) من العمل (j) بالرمز (c_{ij}) ويمثل بالمصفوفة:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

حيث أن هذه المصفوفة عليها أن تكون معبرة عن تكاليف العمل بدلاً من الانتاج.

ترميز المسألة: نفرض

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{عندما يقوم العامل } i \text{ بالعمل } j \\ 0 & \text{〃 〃 لا يقوم العامل } i \text{ بالعمل } j \end{cases}$$

ولتكن x_{ij} معطاة ضمن المصفوفة

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

«المصفوفة هي واحدات وأصفار»

وبما أن عامل واحد لا عليه أن يأخذ إلا عملاً واحداً فهذا يعني أن متحولاً واحداً فقط من السطر (i) سيأخذ القيمة (1) وبقية المتحولات بهذا السطر تأخذ القيمة (0) وبما أن العمل الواحد لا عليه أن ينجز إلا من قبل عامل واحد فإن متحولاً واحداً في العمود الخاص بالعمل يساوي (1) وباقي المتحولات بهذا العمود تساوي الصفر

...ونه: **تابع الهدف**: الربح العائد من إسناد العامل الأول لكل الأعمال هو

$$c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+\cdots+c_{1n}x_{1n}$$

والربح العائد من إسناد العامل الثاني لكل الأعمال هو:

$$c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots+c_{2n}x_{2n}$$

فيكون:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

شروط المسألة: 1) بما أن العامل الواحد لا ينجز إلا عملاً واحداً فيكون:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+\cdots+x_{1n}=1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+\cdots+x_{2n}=1$$
$$\vdots$$
$$x_{n1}+x_{n2}+x_{n3}+\cdots+x_{nn}=1$$

2) بما أن العمل الواحد لا ينجز إلا من قبل عامل واحد فيكون:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+\cdots+x_{n1}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+\cdots+x_{n2}=1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\cdots+x_{nn}=1$$

حيث $x_{ij}\begin{cases}1\\0\end{cases}$

النموذج الرياضي: تابع الهدف:

$$\boxed{Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow Max}$$

وتعاد الشروط التي في هذه المرحلة

مثال: مسألة التفتيش "تدقيق الأعمال"

لدى شركة مرتبتان من المفتشين: مرتبة أولى، مرتبة ثانية

والمطلوب: إسناد مهمة ضبط الجودة لهم وينبغي على الأقل تدقيق (1800) قطعة يومياً خلال (8) ساعات عمل بحيث:

مفتشو المرتبة الأولى يستطيعون تدقيق (25) قطعة بالساعة بدقة (98%).

" الثانية " " (15) قطعة بالساعة بدقة (95%).

فإذا كان معدل أجر مفتش المرتبة الأولى 400 ل.س بالساعة.

" " " الثانية 300 ل.س " ".

وفي كل مرة يخطئ المفتش تتكلف الشركة (200 ل.س).

وإذا علمنا أنه يتوفر لدى الشركة (8) مفتشين مرتبة أولى.

" " " (10) " ثانية.

وترغب الشركة بتحديد الإسناد الأمثل للمفتشين لجعل الكلفة للتفتيش أصغرية

الحل: ترجمة المسألة: لنفرض

X_1 عدد المفتشين من المرتبة الأولى

X_2 " " " الثانية

القيود:

فتكون قيود عدد المفتشين هي $(X_1 \leq 8 \,،\, X_2 \leq 10)$

قيود عدد القطع

مفتشو المرتبة الأولى يستطيعون تدقيق (25) قطعة بالساعة ولديهم عمل (8) ساعات يومياً

ومفتشو المرتبة الثانية لديهم (8) ساعات عمل أيضاً يستطيعون تدقيق (15) قطعة بالساعة

وينبغي تدقيق (1800) قطعة يومياً فيكون

$$\boxed{8(25X_1 + 15X_2) \geq 1800}$$

والشكل المختصر

$$\boxed{5X_1 + 3X_2 \geq 45}$$

تابع الهدف: أجر مفتش المرتبة الأولى بالساعة (400 ل.س) وخسارة أخطاء هذا المفتش

خسارة أخطاء المفتش بالساعة = نسبة الخطأ × عدد القطع × خسارة القطعة

ومنه يكون: تكلفة مفتش المرتبة الأولى بالساعة $400 + 200(25)(0,02) = 500$

وللمفتش المرتبة الثانية أجرته بالساعة (300 دج) وخسارته لأخطائه بالتفتيش

تكلفة المفتش من المرتبة الثانية بالساعة

$$300+200\times(15)\times(0{,}05)=450$$

ومنه تكون التكلفة الكلية بالساعة الواحدة هي $(500X_1+450X_2)$

ولكن لدينا (8) ساعات عمل فيكون:

$$Z=8(500X_1+450X_2)$$

ويكون النموذج الرياضي:

تابع الهدف:

$$Z=8(500X_1+450X_2)\rightarrow Min$$

ضمن الشروط

$$5X_1+3X_2\geq 45$$

$$0\leq X_1\leq 8$$

$$0\leq X_2\leq 10$$

«النماذج المرافقة» "٨"

إن لكل برنامج خطي يمتلك برنامجاً مرافقاً بحيث أنه إذا وجد حل للبرنامج الأصلي يوجد حل للآخر حيث تتساوى قيمة دالة الهدف للبرنامجين والحاجة لإيجاد البرنامج المرافق ضرورية وخاصة في الحالة التي يكون فيها عدد المتغيرات أكبر من عدد القيود.

تشكيل البرنامج المرافق: لنفترض أنه لدينا برنامج خطي تكون فيه تابع الهدف في صورة تعظيم (Max) وشروط في الصورة ($\leq$) ندعوه البرنامج الأصلي بالشكل:

تابع الهدف

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow Max$$

جملة الشروط

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \leq b_n \end{cases} \qquad x_{ij} \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

فيكون البرنامج المرافق للبرنامج الخطي السابق كالتالي:

$$L = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_m \longrightarrow Min$$

جملة الشروط

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases} \qquad y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

ومنه نستنتج مراحل (خطوات - مراحل) بناء النموذج المرافق (البرنامج المرافق) كالتالي:

١) اذا كان تابع الهدف في البرنامج الأصلي تعظيم (أو تقليل) فان تابع الهدف في البرنامج المرافق يكون تقليل (أو تعظيم).

٢) يقابل كل شرط (قيد) بالبرنامج الأصلي متغيراً بالبرنامج المرافق وبالعكس صحيح أيضاً أي " " " المرافق " " " الأصلي.

٣) اذا كان تابع الهدف في أي من البرنامجين بصورة تعظيم (Max) فان القيود تكون بالصورة أقل أو تساوي ($\leq$).

٤) اذا كان تابع الهدف في أي من البرنامجين بصورة تقليل (Min) فان القيود تكون بالصورة أكبر أو يساوي ($\geq$).

٥) معاملات تابع الهدف هي قيم الطرف الأيمن لشروط البرنامج الأصلي.

٦) اذا كان عدد القيود M وعدد المتحولات N بالبرنامج الأصلي فيكون " " N " " M بالبرنامج المرافق.

٧) معاملات المتحولات في شروط البرنامج المرافق هي نفس معاملات المتحولات في شروط البرنامج الأصلي مع تبديل معاملات الأسطر والأعمدة وهذا يعني أن:
معاملات السطر (i) في الشروط المقيدة للبرنامج الأصلي هو نفس معاملات العمود (i) في الشروط المقيدة للبرنامج المرافق.

مثال ١: أوجد النموذج المرافق للبرنامج الخطي الآتي:

$$Z = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 \rightarrow Max$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \leq b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \leq b_3$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل

$$L = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3 \rightarrow Min$$

$$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq c_1$$
$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geq c_2$$
$$a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \geq c_3$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

مثال 2: أوجد البرنامج المقابل للبرنامج الخطي التالي:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to Max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: بما أن دالة الهدف ← Max فيجب أن تكون جميع الشروط (≤) للمتراجحات

ونلاحظ أن الشرط الثاني (≥) وللتحويل لـ (≤) نضربه بإشارة سالب فيصبح:

$$\left(-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq -b_2\right)$$

والشرط الثالث هو مساواة ونعوضه (المساواة تحتوي ≤ و ≥) فيصبح الشرط الثالث شرطان:

$$\begin{pmatrix} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq -b_3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

البرنامج المقابل

$$L = b_1y_1 - b_2y_2 + b_3y_3^+ - b_3y_3^- \to Min$$

$$a_{11}y_1 - a_{21}y_2 + a_{31}y_3^+ - a_{31}y_3^- \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 - a_{22}y_2 + a_{32}y_3^+ - a_{32}y_3^- \geq c_2$$
$$a_{13}y_1 - a_{23}y_2 + a_{33}y_3^+ - a_{33}y_3^- \geq c_3$$
$$y_1, y_2, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

البرنامج الأصلي

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to Max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \quad y_1$$
$$-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \leq -b_2 \quad y_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \quad y_3^+$$
$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \leq -b_3 \quad y_3^-$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$